

Title	定規ト「開キノ定ツタコンパス」 (Eichmass) ニ依ル作圖ニ就テ
Author(s)	彌永, 昌吉
Citation	全国紙上数学談話会. 33 p.1-p.5
Issue Date	1935-03-13
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/74023">https://doi.org/10.18910/74023</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

# 101. 定規ト「開キノ定ツタコンパス」(Eichmass) ニ依ル作圖ニ就テ

彌 永 昌 吉

Hilbert: *Grundlagen der Geometrie* ,  
最後ノ章(第七章)ニ就テ起ツタ疑問ヲ讀者ニ質シ度イ。

コノ章デハ要スルニ、定規ヲ出來ル作圖ノ外、(A) 線分  
ノ移動: 即チ、與ヘラレタ線分  $a$ ; 及ビ與ヘラレタ直線  $l$ ,  
ソノ上ノ定点  $A$ ,  $l$  上ニ  $A$ ニ關シテ定メラレタ側——ガアル  
トキ、コノ側ニ点  $B$ ヲトツテ  $AB = a$  ナラシメルコト、同様  
ノ意味デ

## (B) 角ノ移動

ガ可能トスルトキ、如何ナル作圖題ガ可能トナルカ? ト云  
フ問題ガ論ザラレテアル。(「作圖題」トカ、ソレガ「可能」  
トカイフ意味ヲ公理的立場カラ嚴密ニ述ベルノハ可成リ面倒  
ナノデ、コノデハ差控ヘル) 但シ、「定規ヲ出來ル作圖」トハ  
イフマデモナク「二点ヲ結ガ直線ヲ引ク」トカ、「二直線ガ  
交ルトキ、ソノ交点ヲ求メル」トカイフ作圖; 以下略シテ(L)  
ト書ク。

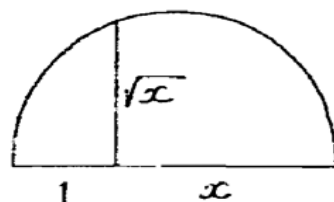
Hilbert ハコノ問題ヲ興味アル代數學ノ向題ニ移シテ  
居ルノデ、ソコニコノ章ノ主流ガアル。ソノ一々思ヒガケナ  
イ結果ハ (L), (A), (B) ヲ出來ル作圖題ノ範圍ハ、定規トコ  
ンパスヲ出來ルソレヨリモ本質的ニ小サイコトデアル。即チ

解析幾何學的ニ考ヘレバ、定規ダケヲ出來ル作

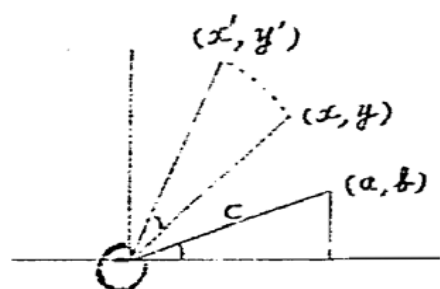
図ハ一次方程式ヲ何度カ解クコトニナル

ノデ、ツマリ「有理運算」ニ相當スルガ、

コンパスヲ使ヘバ知ラレタ長サノ平方根ノ算出が出來ル。(上  
図)



然ルニ (L), (A), (B) デハ勝手ナ平方根ヲ出スノハ不可能  
ナノデアアル。如何ニモ、(A), (B) ハ「平行移動」及ビ「廻轉」  
が出來レバ出來ルコトが容易ニ見エルガ、「平行移動」ハ有  
理運算ノ範圍ヲ出デズ、「廻轉」ノ方程式ハ



$$\begin{cases} x' = \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y \\ y' = -\frac{b}{c}x + \frac{a}{c}y \end{cases} \quad (c^2 = a^2 + b^2)$$

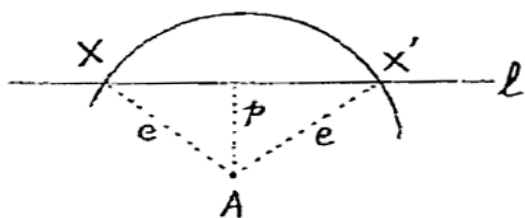
デアアルカラ、コノニ出テ來ル平方根  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  デハ根号ノ  
下ニ必ず平方ノ和ガアル。コレハ任意ノ量デハナイ、例ヘバ  
1 (デ表ハサレル長サ) ノミヲ知ラレタ長サトスルトキ、ソ  
レカラ (L), (A), (B) デ作図サレル (長サヲ表ハス) 数ハ何レ  
代數的ナ実数デアアルガ、ソノ共軛モ亦凡テ実数トナル。何者、  
 $a, b$  ヲ共軛ガ皆実数デアアル様ナ代數的數 (始メ「知ラレ  
タ」ノハ勿論コノヤウナ數) トスレバ  $\sqrt{a^2 + b^2}$  モ亦ヤハリ其  
ノ様ナ數デアアルカラ、( $\sqrt{a^2 + b^2}$ ノ共軛ハ  $\pm \sqrt{a'^2 + b'^2}$ 、但シ  $a',$   
 $b'$  ハ  $a, b$  ノ共軛、 $a', b'$  ハ假定ニ由ッテ實数デアアルカラ、  
 $a'^2 + b'^2 \geq 0$ 。ソノ平方根ハ虚數ニハナラナイ) 依ッテ共軛

が負 = ナルヤウナ数 —— 例へバ  $\sqrt{2} + 1$  —— ノ平方根ノ作図ハ  
(L), (A), (B) デハ出来ナイ!

問題ハソコデ「有理运算ト算法  $\sqrt{a^2+b^2}$  ノ有限回ノ適用  
デ出テ来ル量ノ範囲如何? 共軌ガ皆実数メヤウナ代数的數  
ハソノ中ニ含マレルカ?」ナドトナツテ純代数的ニ進ム。——  
筆者ノ疑義ハコノ主流トハ離レテ、Hilbert ガ「(L), (A),  
(B) デ出来ル」トイフ條件ヲ「定規ト開キノ定ツタコンパス  
(Eichmass)ニ依ル」ト云ヒ替ヘテキル点ニアル。

§36. (第七版) デ、定理 63 トシテ Hilbert ハ (L),  
(A), (B) デ出来ル作図題ハ定規ト開キノ定ツタコンパスデ出  
来ルコトヲ証シテキル。

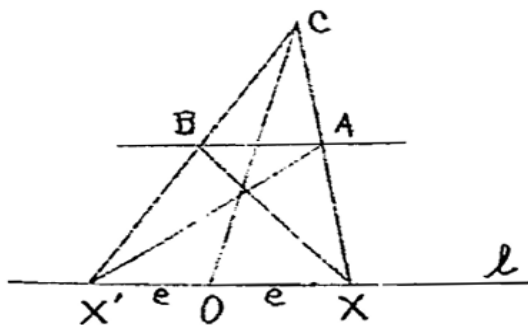
「定規ト開キノ定ツタコンパスデ」トイフノハ (L) ト次  
ノ作圖 (E) トノ可能ヲ假定スルノ意デアレ。



(E) 定ツタ長さ  $e$  ガアレトスル。  
点  $A$  ト直線  $l$  トノ距離  $p (\geq 0)$   
ガ  $\leq e$  ナルトキ、 $l$  上ニ点  $X$   
ヲ求メテ  $AX = e$  ナラシメル

コト。

定理 63 ノ証明ハ初等幾何學的デ大略次ノ通り。



(A), (B) ヲ (L), (E) デ解ケバヨ  
イガ先ニ補助ノ作図題:

(C)  $A$  カラ  $l$  = 平行線ヲ引  
クコト。

(D)  $A$  カラ  $\ell = \text{垂線}$  ヲ引クコト.

ヲ右図 = 示シタヤウ = 解ク。(0ハ

$$l \text{ 上 } = \text{任意} = \text{上図の } C \text{ 7}$$
$$XA \text{ 上} = \text{任意} = \text{トルノデアル})$$

ソレが出来れば, (C), (E)

ヲ用キテ、右ノ如ク (A) ヲ解

キ、次 = (D), (A) ヲ利用シテ

(B) ヲ解ケルヨイ。

サテコノ逆「 $(L), (A),$

(B) デ、(E) が出来るか？」＝

就テハ Hilbert = ハ explicit

＝何も言ッテナイ。然シ§37

7. Kriterium f. d.

Ausführbarkeit geom.

Konstr. mittels Lineals und Eichmasses 7 題

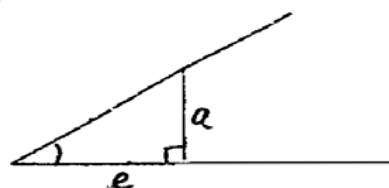
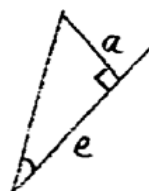
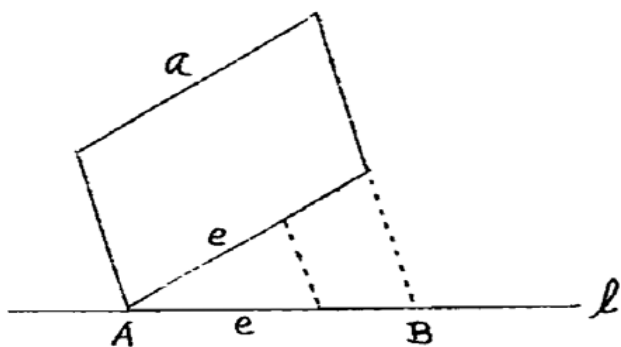
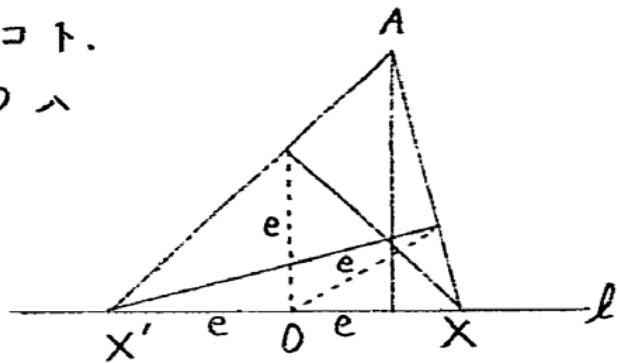
名下 =  $(L), (A), (B)$  = 依る作図が論ぜられ、定規とコンパス

デハ出来ルが、(L), (A), (B) デハ出来ス作図ノ例ヲ尋ゲテ後

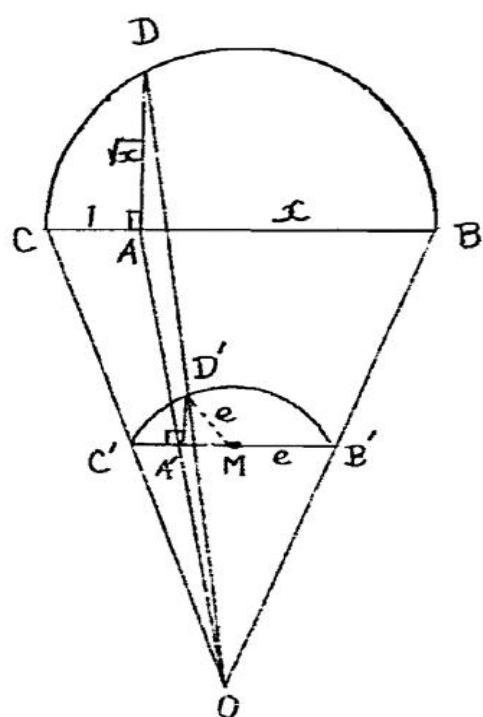
= 八 ( p. 120 下, 方) “ ( (L), (A), (B) が出て来 + 1, ) und kann

daher überhaupt nicht mittels Lineals und  
Eichmasses lösbar sein" ト書イテアル。然ルニ

筆者ハ下ノ如ク (L), (E) = 由ッテ 任意ノ 知ラレタ 長サノ 平方  
根ノ 作図ガ 出來ル 様ニ 思フノ デアル。



(L), (E) が出来るカラ、(A), (B), (C), (D) — 線分、角



ノ移動; 平行線, 垂線, 作図——  
が出来ん。

$x$  の平方根ヲトルノ =、  
 $1+x=2e$  ナラバ (開キノ定マラヌ)  
 コンパスデスルト同様ニ出來ル。  
 サモナケレバ、左図ヲ次ノ順序  
 デ作ル。

A, B, Cヲ先決定セル(線分ノ移動)  $AB =$  平行線ヲ引イテ、ソノ上ニ(任意ニ)一点  $M$ ヲトル、

$B', C' \cap (E)$  ヲ定メ、 $BB', CC'$ 、交ハリ  $O$ 、 $OA, B'C'$ 、交リ  
 $A' \cap (L)$  ヲ定メル、 $A'$  カテ  $B'C' =$ 、 $A$  カテ  $BC =$  夫々垂線ヲ  
 立テ、 $D' \cap (E)$  ヲ定メレバ、 $D$  ハ  $OD'$  ト  $A$  カテ  $BC$  ヘノ垂線  
 トノ交リトシテ出ル。

コレが正シケレバ、コンパスノ「開キヲ定メル」ノハ無意味デアラウ。

——コレハ小サナ初等幾何學的ノ注意デ、當ツテキヨウ  
トキマイト、*Hilbert* 第七章ノ興味ニ変化ハナイ。唯々、  
若シコレが當ツテキルトスレバ、三十年來之レニ氣付カレナ  
カツタノハ稍々不思議ニ感ズル。——トイフノハ或ハ又筆者  
ガ文献ニ暗イセイデ、夙ニ知ラレタコトデモアラウカ。